

Übungen zur Analysis 3 Lösung

9.1 Randdichten einer Gleichverteilung. Die Gleichverteilung auf dem Dreieck

$$\Delta := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

ist das Maß

$$\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu(A) = \frac{\lambda_2(A \cap \Delta)}{\lambda_2(\Delta)}.$$

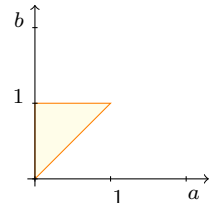
Berechnen Sie die beiden Randdichten von ν bezüglich des Lebesguemaßes.

Lösung

Man beachte die Form des Dreiecks auf der rechten Seite. Es gilt $\Delta = \coprod_{a \in [0,1]} \{a\} \times [a, 1] = \coprod_{b \in [0,1]} [0, b] \times \{b\}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \pi_1(\nu)(A) &= \nu(\pi_1^{-1}(A)) = \int_{\pi_1^{-1}(A)} d\nu = \frac{1}{\lambda_2(\Delta)} \int_{\pi_1^{-1}(A)} 1_{\Delta} d\lambda_2 = \\ &= 2 \int_0^1 \lambda_1((\pi_1^{-1}(A))_a) da = 2 \int_0^1 1_A \lambda_1([a, 1]) da = 2 \int_A 1_{[0,1]}(1 - a) \lambda_1(da) \end{aligned}$$

und wir erhalten die Randdicht $f_1(a) = (2 - 2a) \cdot 1_{[0,1]}$. Analog erhält man $\pi_2(\nu(B)) = 2 \int_A 1_{[0,1]} b \lambda_1(dB)$, d. h. Randdicht $f_2(b) = 2b$.



9.2 Modifizierte Besselfunktionen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *modifizierten Besselfunktionen* $I_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $K_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos t} \cos(nt) dt, \\ K_n(x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x \cosh t} \cosh(nt) dt \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie:

- (a) Sowohl I_n als auch K_n erfüllt die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, die durch

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + n^2)y(x) = 0$$

gegeben wird. Achten Sie bei der Begründung sorgfältig auf die Rechtfertigung der Vertauschung von Integral und Ableitung.

- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die folgende Asymptotik:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi x} e^{-x} I_n(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1, \\ \sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^x K_n(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Lösung

zu (a): Es gilt

$$2\pi I'_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) e^{x \cos(t)} \cos(nt) dt$$

$$2\pi I''_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t) e^{x \cos(t)} \cos(nt) dt.$$

Die Vertauschung von Integral und Ableitung ist unproblematisch, da $[-\pi, \pi]$ endliches Maß hat und gegeben $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto \cos(t) e^{x \cos(t)} \cos(nt)$, bzw. $x \mapsto \cos^2(t) e^{x \cos(t)} \cos(nt)$ auf $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ beschränkt ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned} n^2 2\pi I_n(x) &= n \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos(t)} \underbrace{n \cos(nt)}_{=\sin(nt)'} dt \\ &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} -n \int_{-\pi}^{\pi} x(-\sin(t)) e^{x \cos(t)} \sin(nt) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(\sin(t)) e^{x \cos(t)} \underbrace{n \sin(nt)}_{=-\cos(nt)'} dt \\ &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos(t) e^{x \cos(t)} - x^2 \sin^2(t) e^{x \cos(t)}) \cos(nt) dt \\ &= x I'_n(x) + x^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(t) - 1) e^{x \cos(t)} \cos(nt) dt \\ &= x 2\pi I'_n(x) + x^2 2\pi I''_n(x) - x^2 2\pi I_n(x). \end{aligned}$$

Was zu zeigen war.

Für $2K_n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x \cosh(t)} \cosh(nt) dt$ beachte, dass

$$\cosh(t) e^{-x \cosh(t)} \leq \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) e^{\frac{e^t + e^{-t}}{2}}.$$

Die Integrierbarkeit von $\frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) e^{\frac{e^t + e^{-t}}{2}}$ folgt aus der Substitution $t \mapsto \log(t)$. Ebenso gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} (e^{-x \cosh(t)} \cosh(nt)) \right| &= x \cosh(t) e^{-x \cosh(t)} \cosh(nt) \\ &\leq x \frac{1}{4} (e^t + e^{-t}) (e^t)^n + (e^{-t})^n e^{-\frac{e^t + e^{-t}}{2}} \end{aligned}$$

und wiederum zeigt die Substitution $t \mapsto \log(t)$, dass auch die Ableitung des Integranden integrierbar ist, die auf allen Intervallen der Form $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ eine integrierbare Majorante besitzt. Also können Integral und Ableitung vertauscht werden. Es folgt

$$2K'_n(x) = - \int_{\mathbb{R}} x \cosh(t) e^{-x \cosh(t)} \cosh(nt) dt$$

und

$$2K''_n(x) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cosh^2(t) e^{-x \cosh(t)} \cosh(nt) dt.$$

(Die Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung zur Berechnung von $K_n''(x)$ folgt ähnlich wie im Fall $K_n'(x)$.) Analog zum Fall $I_n(x)$ berechnet man mit partieller Integration und unter Verwendung von $\cosh(nt)' = -n \sinh(nt)$ und $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, dass

$$n^2 K_n(x) = x K_n'(x) + x^2 K_n''(x) - x^2 K_n(x).$$

zu (b): Wir verwenden die Laplace-Methode für asymptotische Gaußsche Integrale. Da die Notation im Skript und in der Aufgabe hierfür etwas verwirrend sind, schreiben wir

$$I_r(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{\cos(x)})^n \cos(rx) dx.$$

Dann hat $f(x) = e^{\cos(x)}$ in O ein globales Maximum und es gilt $f(0) = e$ und $b = |(\log f)''(0)| = 1$. Damit folgt aus Lemma 2.32, dass

$$\sqrt{2\pi n} e^{-n} I_r(n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \frac{\sqrt{n}}{f(0)^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^n \cos(rx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \cos(r \cdot 0) = \cos(0) = 1.$$

Die Rechnung für $K_n(x)$ folgt analog.

9.3ε Vollziehen Sie den Beweis des Satzes 2.37¹ elementargeometrisch am Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nach: Berechnen Sie hierzu (mit Notationen wie im Beweis des Satzes) die Matrizen L, B, K, C und zeichnen Sie Π_A, Π_B und Π_C auf kariertes Papier, am besten farbig. Überlegen Sie sich auch elementargeometrisch, dass Π_A, Π_B und Π_C den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Lösung

Es ist $a_{22} = 1$ und L muss $La_2 = e_2$, $Le_1 = e_1$ für die zweite Spalte a_2 erfüllen. D. h.

$$L = (e_1, e_2)(e_1, a_2)^{-1} = (e_1, a_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$B = LA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

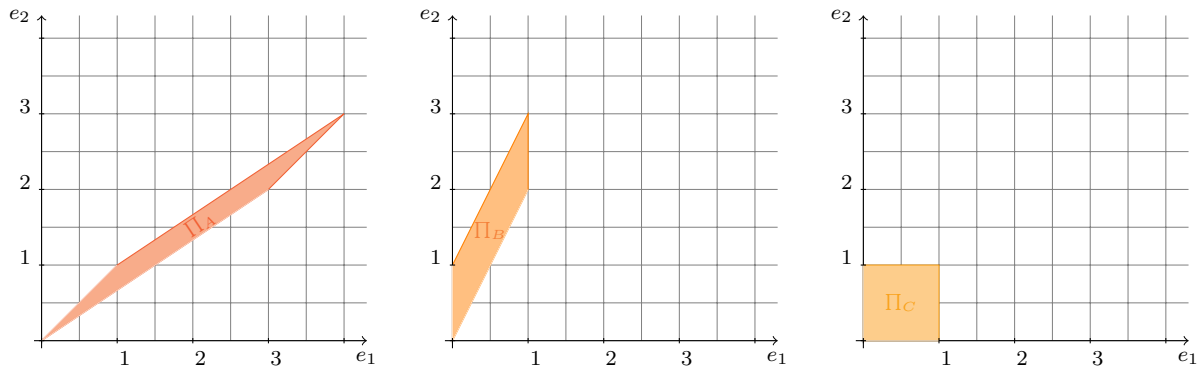
Als nächstes definieren wir $b_1 = La_1 = (1, 2)^t = (b'_1, b''_1)^t$, $b_2 = La_2 = (0, 1)^t = (b'_2, b''_2)^t = e_2$ als die Spalten von B und bestimmen $K = (k_{ij})_{ij}$ mit $Kb_2 = b_2$ und $(Kb_1)' := k_{11}b'_1 + k_{12}b''_1 = b'_1 = 1$, $(Kb_1)'' := k_{21}b'_1 + k_{22}b''_1 = 0$. Wir erhalten

$$K = (e_1, e_2)(b_1, e_2)^{-1} = (b_1, e_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$C = KB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte:



Π_B ist ein Parallelogramm. Π_B hat eine Seitenlänge 1 und die entsprechende Höhe ist ebenfalls 1, d. h. Flächeninhalt $1 = \lambda_2(\Pi_C)$. Zur Berechnung von Π_A können wir z. B. die Fläche entlang der längeren Diagonalen in zwei gleichgroße Teile zerlegen und das Volumen des Teilstückes unterhalb (aus e_1 -Richtung) der Diagonale liegenden Anteils als Differenz von Dreiecken und einem Trapez berechnen:

$$\lambda_2\left(\Pi_A\right)=2\left(\frac{3 \cdot 4}{2}-\frac{(4-3) \cdot(3-2)}{2}-\frac{1+4}{2} \cdot 2\right)=1 .$$

9.4 Fouriertransformierte der multidimensionalen Normalverteilung. Es sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma = \Sigma^t$, eine positiv definite Matrix und ν_Σ die zentrierte multidimensionale Normalverteilung zur Kovarianzmatrix Σ . Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Formel (20) aus Beispiel 1.153¹:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \nu_\Sigma(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2} k^t \Sigma k\right) \quad (1)$$

Lösung

Es ist zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} e^{\frac{1}{2} x^t \Sigma^{-1} x} dx = e^{-\frac{1}{2} k^t \Sigma k}.$$

¹Analysis III Skript.

Dazu sei wie in Beispiel 2.41 A eine Matrix mit $\Sigma^{-1} = A^t A$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\frac{1}{2} x^t \Sigma^{-1} x} dx &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\frac{1}{2} (Ax)^t (Ax)} dx \\
&\stackrel{x \mapsto Ax}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, A^{-1}x \rangle} e^{-\frac{1}{2} \|x\|^2} |\det A^{-1}| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle (A^t)^{-1} k, x \rangle} e^{-\frac{1}{2} \|x\|^2} dx \\
&\stackrel{k' = (A^t)^{-1} k}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k', x \rangle} e^{-\frac{1}{2} \|x\|^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{ik'_j x_j} e^{-\frac{1}{2} x_j^2} dx \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^n e^{ik'_j x_j} e^{-\frac{1}{2} x_j^2} dx_1 \dots dx_n \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\mathbb{R}} e^{ik'_j x_j} e^{-\frac{1}{2} x_j^2} dx_j \\
&= \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2} k'_j} \\
&= e^{-\frac{1}{2} \langle k', k' \rangle} \\
&= e^{-\frac{1}{2} \langle (A^t)^{-1} k, (A^t)^{-1} k \rangle} \\
&= e^{-\frac{1}{2} ((A^t)^{-1} k)^t (A^t)^{-1} k} \\
&= e^{-\frac{1}{2} ((A^{-1})^t k)^t (A^{-1})^t k} \\
&= e^{-\frac{1}{2} (k^t (\Sigma^t)^{-1} k)} \\
&= e^{-\frac{1}{2} (k^t (\Sigma)^{-1} k)}.
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile der Transformationssatz verwendet wurde, die dritte Gleichung aus $\det A^{-1} = (\det \Sigma)^{-1}$ folgt, zur Berechnung der Integrale Beispiel 1.53 verwendet wurde und die letzte Gleichung gilt, weil Σ symmetrisch ist.